PLAN DU CHAPITRE VI – FONCTIONS ELLIPTIQUES

1. introduction

Définition 1. *Un sous-groupe additif $\Omega \subset \mathbf{C}$ est un réseau si*

(1) *Ω est discret,*
(2) *Ω engendre $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{R}$.*

Définition 2. *Un fonction méromorphe $f \in \mathrm{Mer}(\mathbf{C})$ est elliptique de périodes Ω un réseau de $\mathbf{C}$ si $\forall \omega \in \Omega$, $f(z+\omega = f(z)$.*

Remark 1. *L'ensemble des fonctions elliptiques de période Ω est un sous-corps de $\mathrm{Mer}(\mathbf{C})$.*

Remark 2. *Si $f \in \mathrm{Mer}(\mathbf{C})$ alors l'ensemble des périodes de f forme un sous-groupe discret de $(\mathbf{C},+)$.*

Exemple 1. *Reprendre la construction d'une fonction elliptique de périodes $a\mathbf{Z}+ib\mathbf{Z}$ avec $a,b \in \mathbf{R}^*$ faite lors du cours précédent à partir du th{eorèem de représentation conforme et du principe de réflexion de Schwarz.*

D'après les formules de Schwarz-Christoffel, si f est la fonction elliptique de l'exemple ci-dessus alors de sa fonction réciproque est

$$f^{-1}(w) = \int^z \frac{dw}{\sqrt{w(w-1)(w-\lambda))}}$$

pour une valeur λ dépendant de a et b. Ce type d'intégrale apparait dans le calcul de la longueur d'un arc d'ellipse. L'étude de ces intégral commence avec Kepler et se poursuit avec Gauss, Jacobi, Abel et continue encore aujourd'hui.

Exemple 2. *La série $\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$ définie une fonction elliptique de périodes Ω.*

Exemple 3. *Soit $\wp(z) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ \omega\neq 0}} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{w^2}$. Sa dérivée $\wp'(z)$ est elliptique de périodes Ω ce qui implique que pour $\omega \in \Omega$, $\wp(z+\omega)-\wp(z)$ est constante, en posant $z = -\frac{\omega}{2}$ et un utilisant la parité de $\wp$ on montre que cette constante est nulle : $\wp$ est elliptique de périodes Ω*

2. Les réseaux de $\mathbf{C}$

Théorème 2.1. *Si G est un sous groupe discret de $(\mathbf{C},+)$ alors $G=\{0\}$, $G=\mathbb{Z}\omega$ ($\omega \neq 0$) ou $G = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ($\omega_1 \neq 0$ et $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbf{R}$).*

Ces derniers sont les réseaux.

Proof. –

□

Remark 3. *Si Ω est un réseau et $\lambda \in \mathbf{C}^*$ alors $\lambda\Omega$ est un réseau.*

Définition 3. *Une similitude de Ω_1 dans Ω_2 est une application $z \to \lambda z$ qui envoie Ω_1 dans Ω_2.*

Un endomorphisme du réseau Ω est une similitude ...

Un automorphisme du réseau Ω est une similitude ...

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^4 : |ad-bc| = 1 \right\}$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ son sous-groupes des matrices de déterminant 1.

Théorème 2.2. *Si (ω_1,ω_2) et $(\tilde\omega_1,\tilde\omega_2)$ sont deux bases d'un réseau Ω alors $(\omega_1,\omega_2) = (\tilde\omega_1,\tilde\omega_2)A$ avec $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$*
Si $\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde\omega_2}{\tilde\omega_1}\right) > 0$ alors $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$

Proof. –

□

Faire les deux premiers exercices de la feuille de TD

3. Généralités sur les fonctions elliptiques

Ω sera un réseau fixé dans $\mathbf{C}$ et (ω_1, ω_2) une base de Ω.

Pour $a \in \mathbf{C}$, on note $\mathcal{P}_a$ le parallélogramme $[a, a+\omega_1, a+\omega_1+\omega_2, a+\omega_2]$. Pour une fonction elliptique f, on choisira a de telle sorte qu'aucun zéro ni pole ne soient sur le bord de $\mathcal{P}_a$.

(Montrez que c'est possible)

Proposition 1. *Une fonction elliptique sans pôle est constante.*

Proof. –

□

Théorème 3.1. *Si f est elliptique alors $\sum_{a\in\mathcal{P}_a} \mathrm{res}_z(f) = 0$.*

Proof. –

□

Corollary 1. *Il n'existe pas de fonction elliptique n'ayant qu'un pôle simple modulo Ω*

Proof. –

□

Corollary 2. *Si f est elliptique alors $\sum_{a\in\mathcal{P}_a} \nu_z(f) = 0$.*

Proof. –

□

Corollary 3. *Si f est une contion elliptique non contante alors pour tout $c \in \hat{\mathbf{C}}$, l'équation $f(z) = c$ a le même nombre de slution modulo Ω comptés avec multiplicité.*

Proof. –

□

Théorème 3.2. *Si f est elliptique, s'annule en $a_1, \ldots a_d \in \mathcal{P}_a$ et ayant des pôles en $b_1, \ldots, b_d \in \mathcal{P}_a$, énumérés avec multilicité alors*

$$\sum a_i \equiv \sum b_i \mod \Omega$$

Proof. –

□

4. La fonction $\wp$ de Weierstrass

Proposition 2. *La fonction $\wp$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$, paire, Ω-périodique. Elle n'a qu'un seul pôle double sans résidu modulo Ω. de plus il existe $g_2, g_3 \in \mathbf{C}$ (dépendant de Ω) tels que*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

On note $G_2 = \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ \omega\neq 0}} \frac{1}{\omega^4}$ et $G_3 == \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ \omega\neq 0}} \frac{1}{\omega^6}$ puis $g_2 = 60G_2$ et $g_3 = 140G_3$

Proof. –

□

Remark 4. *On en déduit que si $f = \wp^{-1}$ alors $f'(w) = \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}$*

Théorème 4.1. *Le corps des fonctions elliptiques de période Ω est $\mathbf{C}(\wp, \wp')$ où $\wp$ est la fonction associée au réseau.*

Remark 5. *La fonction $e^{\wp}$ est Ω-périodique mais pas méromorphe sur $\mathbf{C}$. Elle n'est donc pas elliptique.*

Proof. –

□

5. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

La fonction $\wp$ a des proprietés semblables aux fonctions circulaires (exp, cos etc.)

L'equation differentielle du cosinus permet de voir que l'application $\theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$ paramètre le cercle. L'équation différentielle de la fonction $\wp$ s'interprète de la manière suivante :

La fonction
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C} - \Omega & \to & \mathbf{C}^2 \\ z & \mapsto & (\wp(z), \wp'(z)) \end{array}$$
prend ses valeurs dans la cubique :

$$\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}$$

Lemma 1. *La cubique est lisse si et seulement si* $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$

Pour différentes valeurs réelles de g_2 g_3, dessinez (à la main ou avec votre logiciel préféré) la trace réelle de la courbe :
$$\mathbf{R}\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}$$

Théorème 5.1. *Soit Ω un réseau de fonction $\wp$ et de cubique $\mathscr{C}$. Alors $\mathscr{C}$ est lisse, l'application ci-dessus induit une identification $(\mathbf{C} - \Omega)/\Omega$ avec $\mathscr{C}$ et $\mathbf{C}/\Omega$ avec $\hat{\mathscr{C}}$.*

L'application $(\cos, \sin)$ réalise le quotient de $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) par $2\pi\mathbf{Z}$; c'est un morphisme de groupe dont image est $\mathbb{S}^1$ (ou $\mathbf{C}^*$). De manière analogue, le théorème précédent dit que le compactifié d'Alexandroff de $\mathscr{C}$: $\hat{\mathscr{C}} = \mathscr{C} \cup \{\infty\}$ a une structure de groupe dont l'élément neutre est ∞.

Cette loi de groupe a une interprétation géométrique.

Nous dirons que les droites complexes verticales $x = cst$ passe par ∞.

Lemma 2. *Une droite complexe de $\mathbf{C}^2$ coupe la cubique en au plus trois points. Si elle coupe $\mathscr{C}$ en deux points seulement alors soit elle est tangent à $\mathscr{C}$, soit elle passe par ∞ . Si elle coupe $\mathscr{C}$ en un seul point alors soit ce point est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$ soit la droite est une tangente passant par ∞.*

Proof. –

□

Trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont alignés si et seulement si
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Théorème 5.2 (La loi de groupe). *Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C} - \Omega$ tels que $z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \mod \Omega$ alors*
$$\begin{vmatrix} \wp(z_1) & \wp(z_2) & \wp(z_3) \\ \wp'(z_1) & \wp'(z_2) & \wp'(z_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En particulier, $\wp(z_1 + z_2)$ s'exprime rationnellement en fonction de $\wp(z_1), \wp(z_2), \wp'(z_1), \wp'(z_2)$ comme c'est le cas pour $\cos(z_1 + z_2)$.

Ces formules font l'objet de dernier exercice de la feuille de TD.

Que se passe-t-il lorsque $z_1 = z_2$? lorsque $z_3 \in \Omega$?

Et si $z_1 = z_2 = z_3$?

Dessinez (la trace réelle) de la cubique et placez les points $P_1 = (\wp(z_1, \wp'(z_1))$ et le point

Pour completer ce plan vous pouvez vous aider de tous les documents que vous trouverez,

par exemple :

Ahlfors

https://people.math.gatech.edu/~mccuan/courses/6321/lars-ahlfors-complex-analysis-third-edition-mcgraw-hill-science_engineering_math-1979.pdf

ou le cours de Michèle Audin

http://irma.math.unistra.fr/~maudin/fonctionsspe1109.pdf